

TEORICA DELLE FUNZIONI

DI VARIABILI COMPLESSE

ESPOSTA DAL

DOTT. FELICE CASORATI

PROF. DI CALCOLO DIFFERENZIALE E INTEGRALE NELLA R. UNIVERSITÀ DI PAVIA

—
VOLUME PRIMO.
—



PAVIA

TIPOGRAFIA DEI FRATELLI FUSI

1868.

AL SUO CARO E ILLUSTRE MAESTRO
SENATORE FRANCESCO BRIOSCHI
CHE COLLA VOCE E COGLI SCRITTI
L'ISTRUZIONE DELLA GIOVENTÙ
INDEFESSAMENTE PROMOVE
E L'ONORE DELLE MATEMATICHE IN ITALIA
SALDAMENTE MANTIENE
QUESTO LAVORO DEDICA L'AUTORE
IN SEGNO DI ALTISSIMA STIMA
E DI PERPETUA GRATITUDINE

PREFAZIONE

Diffondere in Italia tra i giovani cultori delle matematiche i principi della variabilità complessa e la conseguente teorica generale delle funzioni, mostrar loro l'importantissima applicazione che se n'è fatta allo studio delle funzioni definite da equazioni algebriche ed algebrico-differenziali, e così metterli in grado di profittare agevolmente di tutti gli scritti originali comparsi e che vanno comparando in questo ramo d'analisi, come fu il nostro intento nelle lezioni libere d'Analisi Superiore date in questa Università di Pavia negli anni scolastici 1866 e 1867, così è lo scopo della presente pubblicazione.

Per orientare sino da principio il lettore nel vasto campo, additandogli in pari tempo gli scritti ai quali ci riferiamo, abbiamo pensato di premettere alcune notizie storiche. Non ci siamo proposti il compito gravissimo, e non necessario, di una storia completa e circostanziata di tutti quanti i lavori che a questa materia hanno attinenza; ma soltanto una rapida indicazione di quelli nei quali si svolsero le precipue idee e furono conseguiti i risultamenti di più

generale importanza. Ci si vorrà dunque perdonare, se, in vista di ciò, e senza pregiudizio della stima dovuta a ciascuno scrittore, abbiamo taciuto di molti fra quei lavori che concernono esclusivamente uno od altro dei singoli argomenti o singole teorie che si legano alla variabilità complessa, comunque nella loro specialità importanti; se abbiamo taciuto di quei lavori i quali, trattando della variabilità complessa, deviano dal sistema di rappresentazione che con Gauss e Cauchy venne universalmente adottato; se abbiamo infine taciuto di tutti quelli che giudicammo potersi riferire piuttosto alla geometria che all'analisi, e la cui ommissione non ci parve impedire una chiara connessione delle idee destinate a entrare nel presente corso.

Saremo riusciti a scegliere e coordinare sempre opportunamente cose sparse in sì gran numero di scritti? Ce ne rimettiamo con reverente fiducia ai giudici competenti. Ben possiamo dire che la divisione in *Sezioni* e la successione di queste ci si offersero da sè per le più opportune; ma, quanto all'ordine, per dir così, interno di qualche *Sezione* e delle *Notizie*, e a certe particolari norme in esse seguite, non dobbiamo tacere la influenza che ebbero le interruzioni alle quali la redazione dell'opera andò soggetta per cause estranee alla scienza, e taluni riguardi speciali avuti nel concepire il piano di essa.

Avendo la redazione e la stampa durato più di quello che credevamo da principio, demmo luogo nel frattempo ad alcune giunte e modificazioni, le quali, se possono aver turbato in qualche parte quell'armo-

nia e spontaneità che sovente s'accompagna al primo disegno di un' opera, contribuiranno però in sostanza, lo speriamo, a rendere la presente sempre più idonea al suo scopo.

Gli speciali riguardi, dei quali abbiamo toccato qui sopra, si manifestano segnatamente nelle *Notizie*, per la esposizione alquanto particolareggiata di talune idee in confronto di altre, e nelle *Sezioni prima e terza*, per la trattazione incompleta ed inegualmente estesa degli argomenti. Il che, se può parere non del tutto opportuno per giovani allevati in altri istituti, riceve spiegazione dall' esserci noi regolati sull' indirizzo e sull' estensione delle cognizioni impartite d' ordinario nella nostra Università durante i primi due anni dello Studio matematico (1).

Se poi si noterà, avere noi dato alla seconda serie delle *Notizie* maggior ampiezza che non alla prima, ed essere entrati in più minuti particolari a riguardo di Cauchy e di Riemann che non di tutti gli altri analisti, vogliasi scorgerne la ragione in ciò che, informandosi l' opera nostra più specialmente alle idee ed ai metodi di questi due celebri matematici, ci è parso di dover mettere in maggior luce, per quali modi nei loro lavori la dottrina della variabilità complessa siasi svolta e costituita nella forma in cui la presentiamo.

Nelle *Notizie* profitammo di alcuni brani del rap-

(1) Abbiamo però ommesso, nel presente volume, le dimostrazioni di tre teoremi assai importanti che non entrano nel giro di queste cognizioni; essendoci contentati per il primo (Continuità delle funzioni algebriche, §. 45) di rimandare il lettore alla Memoria in cui originariamente venne dato, e riservandoci per gli altri due (Continuità, derivazione e integrazione delle serie, §. 49. Convergenza della serie $\sum$, §. 61) di ritornarvi più tardi.

porto sui recenti progressi dell'analisi letto dal R. L. Ellis nell'adunanza del 1846 della *British Association*, e dell'elogio di Jacobi letto da Dirichlet nel Luglio 1852 all'Accademia delle Scienze di Berlino (1), non che d'altri luoghi segnati dalle rispettive citazioni.

Alle difficoltà di esposizione, che avremmo incontrato in qualsiasi altra materia, qui si aggiunse quella non lieve di aver dovuto cercare ed eleggere i vocaboli necessari ad esprimere parecchie idee e parecchie sorte di considerazioni non ancora divulgate in Italia, dove non conosciamo altri scritti sull'argomento fuorchè alcuni del prof. Betti.

Per certo, nell'intraprendere questo lavoro, anzichè consultare severamente le forze del nostro ingegno e l'attitudine della nostra parola, abbiamo obbedito al desiderio di provvedere la gioventù italiana di un sussidio che le mancava per studi di somma importanza. Tuttavia, senza dissimularci le imperfezioni di esso, speriamo che non sia per fallire di molto al suo scopo; confortandoci nel pensiero che quei giovani, i quali riusciranno a superare le difficoltà e l'apparente aridezza che fossero per trovare in alcuni paragrafi delle prime *Sezioni*, sentiranno di poi crescere ognor più il loro interessamento per questi studi, e si terranno paghi della loro fatica;

(1) Pel rapporto citato (portante anche il titolo più particolare di *Theory of the Comparison of Transcendentals*) vedi il relativo volume fatto stampare, come di regola, dalla *Association*.

L'elogio di Jacobi, oltrechè nel tomo 52 del giornale di Crelle, può leggersi, tradotto in italiano, nel tomo 7 degli *Annali di Scienze mat. e fisiche* (Roma, 1856).

come noi in questo caso crederemo d'aver colto il più desiderabile frutto della nostra.

Prima di terminare questa prefazione ci sia permessa una breve parola su cose posteriori al 1865, col qual anno chiudemmo le nostre *Notizie*.

Riemann cessò di vivere il 20 Luglio 1866 (1).

(1) Attaccato da malattia polmonare, Riemann, sul cadere del 1862, si condusse, per consiglio dei medici, in Italia. Passato l'inverno a Messina, si restituì in Germania; ma rifece presto il cammino d'Italia, fermandosi in Pisa dal Novembre 1863 sino alla primavera del 1865. Da Pisa passò a Livorno, a Genova, a Nizza e finalmente a Selasca, paesello vicinissimo a Intra sul lago Maggiore, dove stette l'inverno 1865-66. Ritornato nella primavera 1866 in Germania, si ricondusse ben tosto a Selasca, dove terminò i suoi giorni. Una lapide fu quivi posta per indicare il suo sepolcro con le parole « Hier ruhet in Gott Georg Friedrich Bernhard Riemann, Professor zu Göttingen, geboren in Breselenz den 17 Sept. 1826, gestorben in Selasca den 20 Juli 1866. Denen die Gott lieben, müssen alle Dinge zum Besten dienen ».

Ecco la nota degli scritti da lui consegnati alla stampa.

1. *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*. Dissertazione inaugurale stampata in Gottinga nel 1854, e ristampata di fresco, essendone da tempo esaurita la prima edizione.

Negli Annali di Fisica e Chimica di Poggendorf.

2. *Zur Theorie der Nobili'schen Farbenringe* (Tomo 95).

Nel Giornale di Crelle-Borchardt

5. *Allgemeine Voraussetzungen und Hilfsmittel für die Untersuchung von Functionen unbeschränkt veränderlichen Grössen* (Tomo 34).

4. *Lehrsätze aus der analysis situs für die Theorie der Integrale von zweigliedrigen vollständigen Differentialen* (Tomo 34).

5. *Bestimmung einer Function einer veränderlichen complexen Grösse durch Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen* (Tomo 34).

6. *Theorie der Abel'schen Functionen* (Tomo 34). Di questa famosa Memoria si può avere copia separata, che contiene anche i tre articoli precedenti, col titolo della Memoria stessa (Berlino, 1857).

7. *Ueber das Verschwinden der θ -Functionen* (Tomo 65).

Fra le memorie della R. Società delle Scienze di Gottinga.

8. *Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe $F(z, \beta, \gamma, x)$ dar-*

Questa fine immatura e altamente lamentevole non scema punto il grandissimo valore dei risultamenti da lui ottenuti; ma può tuttavia esercitare non poca influenza sul grado di diffusione che saranno per conseguire i suoi metodi di ricerca, i quali, adoperati da un così potente ingegno, avrebbero continuato a dare

stellbaren Functionen (Tomo 7). Di questa Memoria, che venne in luce nello stesso anno della *Theorie d. A. Funct.*, e pur' essa concorse a fare splendida prova della fecondità del metodo riemanniano, vorremmo veder presto una ristampa, essendone esaurite le copie a parte.

9. *Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite* (Tomo 8).

10. *Ein Beitrag zu den Untersuchungen über die Bewegung eines gleichartigen flüssigen Ellipsoids* (Tomo 9).

Nei Monatsberichten dell'Accademia delle Scienze di Berlino.

11. *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* (Novembre 1859).

Nel tomo 7 degli Annali di Matematica (Roma, 1866) si legge un estratto di una lettera scritta da Riemann in lingua italiana, nel Gennajo 1864, al sig. Betti, sull'attrazione di un cilindro ecc.

Finalmente si troveranno nel tomo 15 delle Memorie della R. Società delle Scienze di Gottinga due lavori inediti, comunicati dal sig. Dedekind, che Riemann stendeva per conseguire nel 1854, presso l'Università di Gottinga, il diritto d'insegnare, i quali versano rispettivamente *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe* e *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*; e, oltre di questi, un recente lavoro *Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung*, redatto per incarico di Riemann stesso dal sig. Hattendorff. Con siffatta nuova applicazione del proprio metodo Riemann torna a incontrarsi in uno stesso campo scientifico coll'illustre fondatore della teorica delle funzioni iperellittiche, le ricerche del quale (*Ueber die Flächen, in denen die mittlere Krümmung überall gleich Null ist*, ossia *Minimal-Flächen*) si possono vedere nei Monatsberichten dell'Accad. di Berlino del 1866.

Per ulteriori notizie sulla vita e sui lavori di Riemann vedasi il breve estratto (Nachrichten der K. Gesellschaft d.W. zu Göttingen. 1867. Juni 19) della commemorazione preparata dal sig. Schering per essere inserita fra le Memorie dello stesso Corpo scientifico; alla quale però il detto matematico farà precedere, giusta lo svolgimento storico della scienza, la commemorazione di Gauss.

ognora nuovi ed importantissimi risultati, e ottenuto di tal maniera senz'altro viepiù numerose ed autorevoli adesioni. Però, checchè avvenga, pur non essendo i soli coi quali sia possibile il progresso in questa disciplina, siffatti metodi non cesseranno di essere sommaramente opportuni e tali da compensare largamente la fatica necessaria per prenderne intima cognizione.

Fra gli scritti, che con frequenza crescente si vanno succedendo in relazione colla nostra materia, il più notevole, in questi ultimi due anni (1866 e 1867), è la *Theorie der Abel'schen Functionen* dei sigg. Clebsch e Gordan. « Volgendo in mente il pensiero » dicono i due autori « di stabilire la teorica delle funzioni abeliane in una nuova maniera, ci è parso che fosse specialmente da riportarsi l'attenzione sulla primitiva sorgente della intera disciplina, cioè sul problema jacobiano d'inversione, sopra del quale il sig. Weierstrass ha sì felicemente fondata la teorica delle funzioni iperellittiche. E ci è parso conseguentemente possibile, pigliando le mosse dal medesimo, di pervenire direttamente ad una formola analoga alla jacobiana

$$\frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} = e^{\int_0^u Z(u) du},$$

e perciò contenente, come nella teorica del sig. Weierstrass, la soluzione del problema d'inversione. Ed infatti bastarono alcune considerazioni geometriche ed alcuni teoremi della integrazione complessa, per poter battere compiutamente questa via diretta » (1). Insieme

(1) Pagg. v e vi della prefazione di essa opera. Altri passi della prefazione medesima ci diedero occasione di fare *Alcune riflessioni relative*

cogli scritti, che specialmente furono nostra guida, raccomandiamo con calore anche lo studio di quest'opera; persuasi che l'intimo legame per essa stabilito fra la moderna geometria e il ramo più importante delle moderne ricerche analitiche debba esercitare grande influsso sull'avvenire di quella e di questo.

Gli scritti di minor mole, in questi medesimi due anni, sono pure dovuti quasi tutti a matematici tedeschi, e rinvengonsi per la più parte nel giornale di Crelle-Borchardt, nei Monatsberichten dell'Accademia di Berlino, nella Zeitschrift für Mathematik und Physik e negli Annali di Matematica in Milano (1).

Infine vogliamo qui render grazie al dott. Carlo Formenti, uno tra quelli che seguirono col maggior interessamento le nostre lezioni, per le intelligenti e assidue cure da lui prestate nella correzione delle prove di stampa.

Pavia, Gennajo 1868.

alla teorica generale delle funzioni di variabili affatto libere, che leggonsi nel vol. 3 dei *Rendiconti* del R. Istituto Lombardo (Dicembre 1866).

(1) Come autori di questi scritti possiamo indicare i sigg. Betti, Brill, Christoffel, Fuchs, Hankel, Heine, Königsberger, Kronecker, Neumann. Prym, Roch, Schläfli, Thomae, Weierstrass. — La Memoria del sig. Prym, a cui qui alludiamo, ha per titolo: *Zur Theorie der Functionen in einer zweiblättrigen Fläche*, e fa parte del tomo 22 delle Mem. della Schweiz. Naturforsch. Gesellschaft. — Il sig. Hankel sta pubblicando un corso di *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen*, diviso in due parti. Ne comparve finora la prima parte, ove sono svolte con molta cura e compiutamente le proprietà fondamentali dei vari sistemi di numeri. — E qui citeremo eziandio la prima parte (*Algèbre des quantités complexes*, estratta dalle Mem. della Soc. di Scienze fis. e nat. di Bordeaux, 4. cahier 1867) di una *Théorie élémentaire des quantités complexes*, che sta pubblicando il sig. Hoüel.